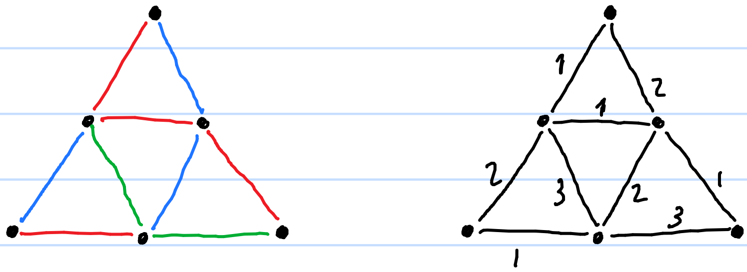
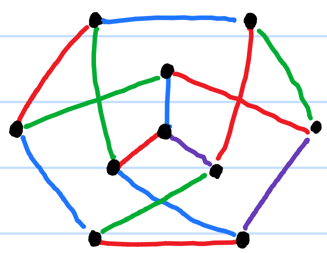
Teoria de Ramsey

- Nesta aula vamos estudar k-colorações (ñ necessariamente próprias) de um grafo completo.

- Dado um $k \in \mathbb{N}$, uma <u>k-coloração (de arestas)</u> de um grafo G é a atribuição das cores de um conjunto contendo k cores às arestas de G. Formalmente definimos uma <u>k-coloração (de arestas)</u> como uma função $c: E(G) \to [k]$. Os números do contradomínio são chamados de <u>cores</u>.





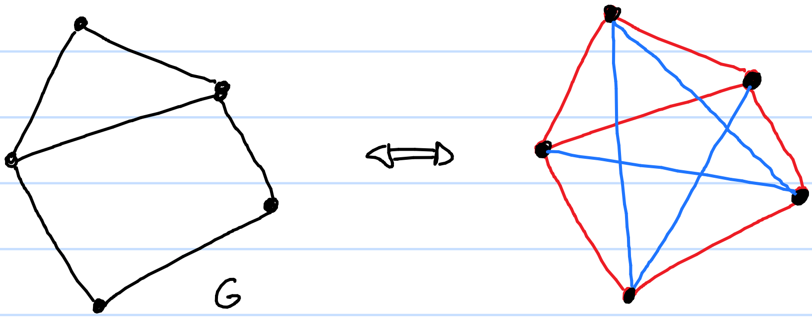
- dizemos que uma k-coloração c é <u>própria</u> se, para todo par de aresta uv, uw, temos que $c(uv) \neq c(uw)$.

  arestas que compartilham um extremo.

- Ademais, qndo o número de cores ñ for relevante, simplesmente dizemos que c é uma <u>coloração (de arestas)</u>.

- No caso de 2-colorações, dizemos que as cores utilizadas são o vermelho e o azul.

• Note que podemos associar qualque 2-coloração do K_n a um grafo G com n vértices, em que $E(G)$ são as arestas de K_n com a cor vermelha.



↳ Forma alternativa de olhar G.

<u>Objeto de estudo</u>: estruturas monocromáticas que podem ser encontradas em <u>qualquer</u> coloração com um número fixo de cores.

Proposição 1. Toda 2-coloração das arestas de K_6 possui um triângulo monocromático

→ Já provemos esse resultado na primeira aula em um contexto ligeiramente diferente.

Teo Em uma festa com 6 convidados, há 3 convidados que se conhecem mutuamente, ou três que ñ se conhecem mutuamente

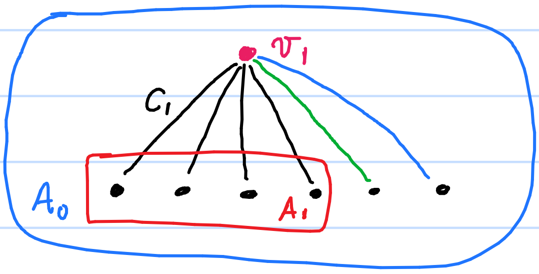
↳ aresta azul : liga dois convidados que se conhecem
aresta vermelha : liga dois convidados que <u>não</u> se conhecem

Teorema 2 (Ramsey, 1930) Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vale o seguinte. Toda r-coloração das arestas de K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

Demonstração

- Seja $\chi : E(K_n) \to [r]$ uma r-coloração arbitrária de K_n. Vamos provar que existe uma cópia monocromática
- Seja $A_0 = V(K_n)$
- Seja $v_1 \in A_0$
- Pelo Princípio da Casa dos Pombos generalizado, existe uma cor $c_1 \in [r]$ tal que v_1 é incidente a pelo menos $\frac{(n-1)}{r}$ arestas de cor c_1.
- Seja

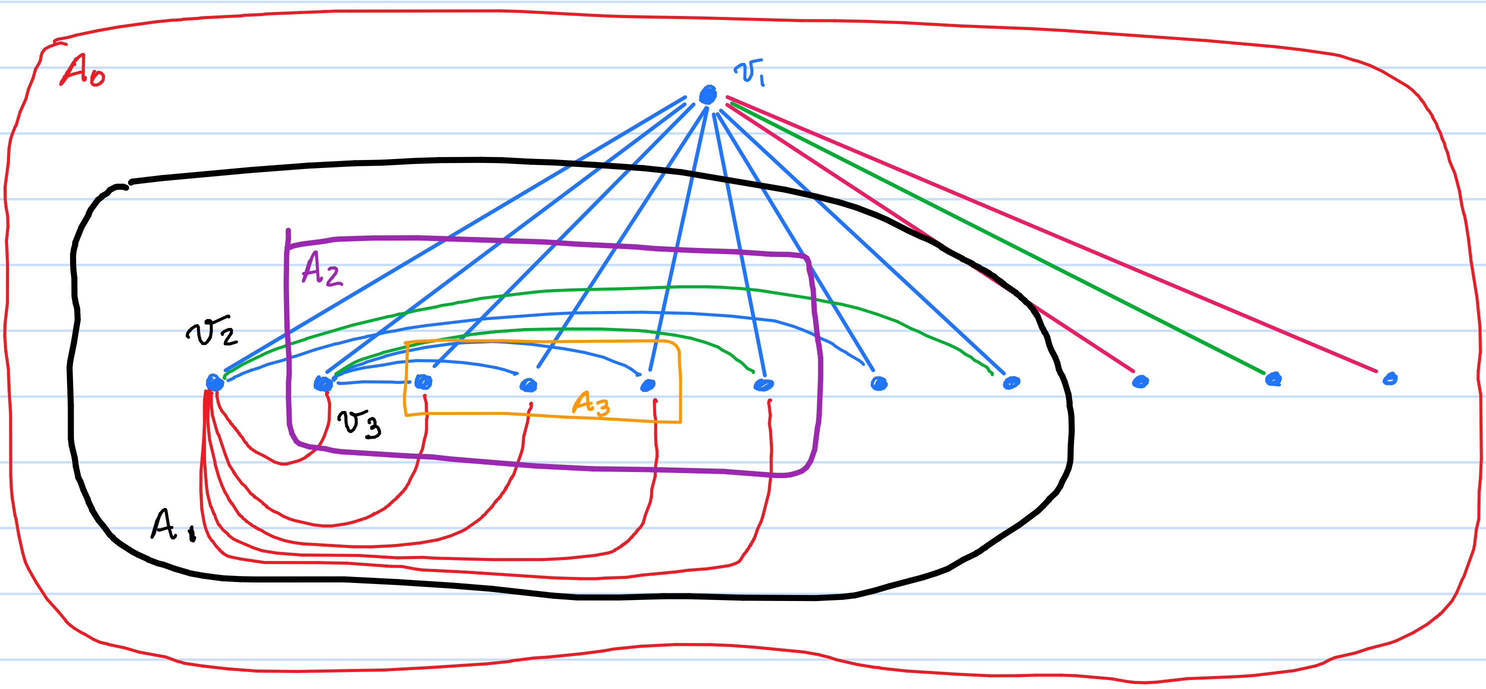
$$A_1 = \{ u \in A_0 : \chi(v_1 u) = c_1 \}$$

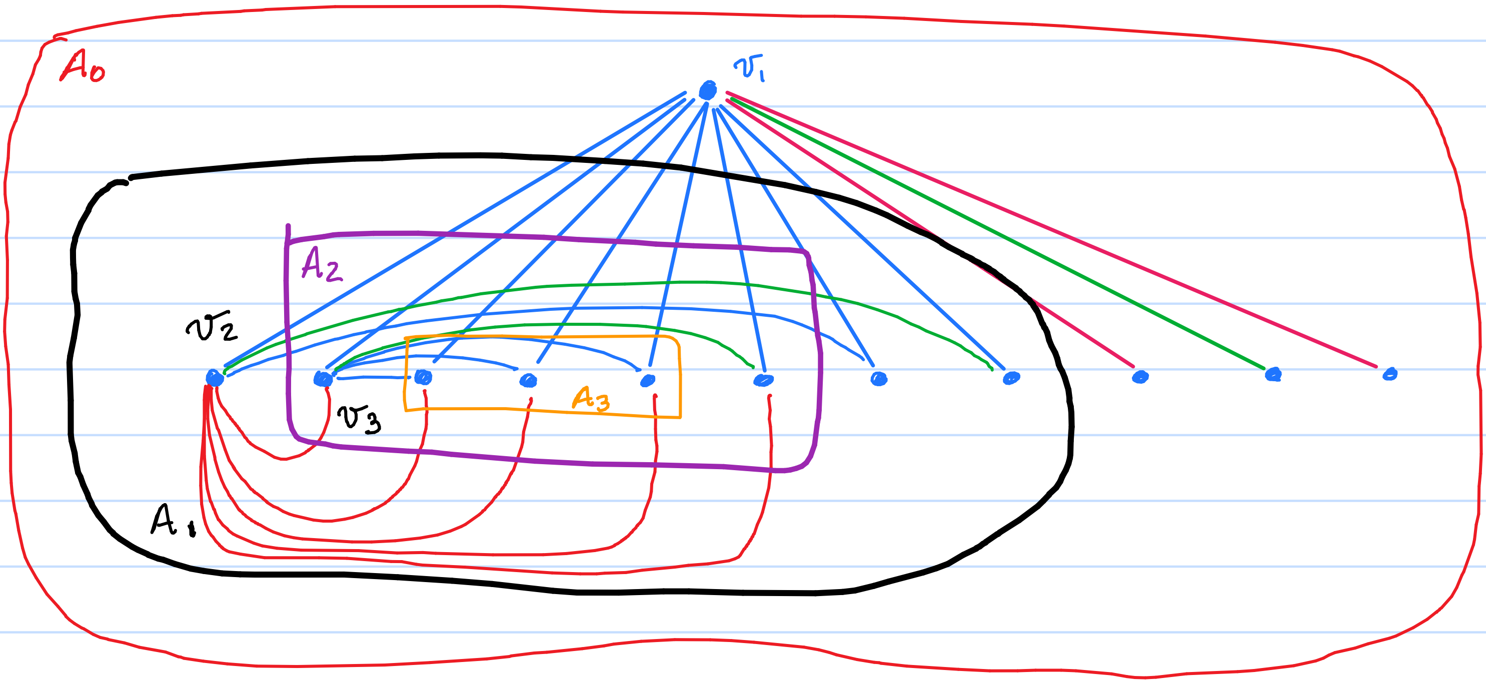


- Claramente $|A_1| \geq \frac{|A_0| - 1}{r} = \frac{n-1}{r}$
- Agora escolha um vértice $v_2 \in A_1$ e repita o processo. Então obtemos uma cor c_2 e um conjunto

$$A_2 = \{ u \in A_1 : \chi(v_2 u) = c_2 \}$$

de tamanho ao menos $\frac{|A_1| - 1}{r}$





- Repetindo essa operação, obtemos uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_t$, cores $c_1, c_2, \dots, c_t \in [r]$ e conjuntos $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_t$ tais que $v_i \in A_{i-1}$ e $\chi(v_i u) = c_i$ para todo $i = 1, \dots, t$ e para todo $u \in A_i$. Em particular, note que

$$\chi(v_i v_j) = c_i \quad \text{para todo} \quad i < j \qquad (*)$$

- Como n é suficientemente grande, podemos continuar esse processo até $t \geq rk$.
- Pelo princípio da casa dos pombos generalizado, existe uma cor $c \in [r]$ que aparece ao menos r vezes na sequência $c_1, c_2, \dots, c_t$

As casas são as r cores e os pombos são os c_i's
Bote c_i na casa que representa a cor c_i
imagine que c_i é vermelho, então põe c_i na casa vermelha

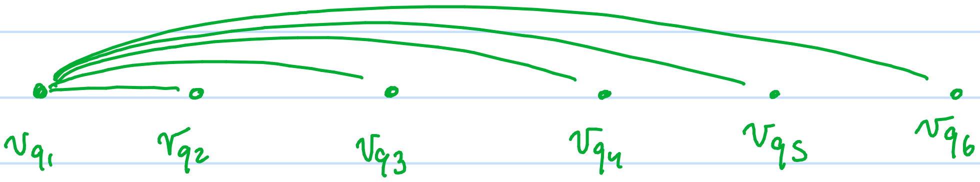
Pelo princípio há uma casa (cor) com ao menos $\frac{t}{r}$ c_i's, ou seja, a cor dessa casa apareceu ao menos $\frac{t}{r}$ vezes na sequência $c_1, c_2, \dots, c_t$

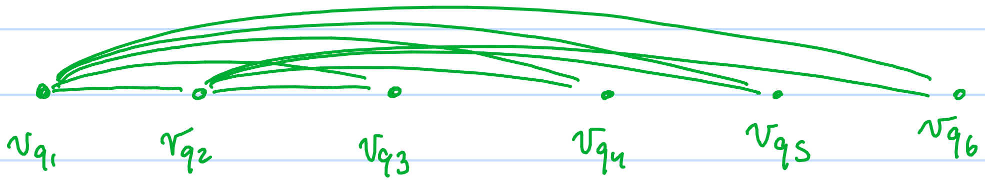
- Seja $S = \{v_i : c_i = c\}$ e note que $|S| \geq \frac{t}{r} \geq k$
- Note que $G[S] \supseteq K_k$ monocromático de cor c.

próxima PG

Seja $S = \{v_{q_1}, v_{q_2}, \dots, v_{q_m}\}$, onde $q_i < q_j$ para $i < j$

Sabemos que $\chi(v_{q_i} v_{q_j}) = c$ para todo $i < j$ (veja $*$)





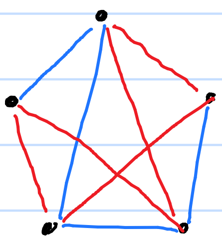
$\square$

Número de Ramsey

- O teorema 2 naturalmente leva à pergunta de encontrar o menor n com a propriedade estudada.

Def. O <u>número de Ramsey</u> $R(K)$ é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda 2-coloração de arestas do K_n contém uma cópia monocromática do K_K.

- $R(3) = 6$
  - → pela proposição 1 $R(3) \leq 6$
  - → Pelo exemplo abaixo $R(3) > 5$



- $R(4) = 18$
- $43 \leq R(5) \leq 48$
- $102 \leq R(6) \leq 161$

Paul Erdős uma vez disse que se derepente uma força alienígena, muito mais poderosa do que nós, pousasse na terra e exigisse de nós o valor de $R(5)$ em um ano ou, caso contrário, eles destruiriam a terra, que a melhor chance da humanidade seria reunir todo o poder computacional da humanidade em um lugar, junto de todos os matemáticos da terra, para em um esforço global conseguir determinar o valor de $R(5)$.
No entanto ele advertiu que se a entidade alienígena pedisse pelo valor de $R(6)$, então a humanidade deveria contra-atacar imediatamente, pois não haveria nenhuma chance de calcularmos o valor de $R(6)$.

macete p/ lembrar a ordem:
Red
~~Green~~
Blue

Def. Dados grafos G, H_1 e H_2, escrevemos
$$G \to (H_1, H_2)$$
para denotar que toda 2-coloração de G contém uma cópia vermelha de H_1 ou uma cópia azul de H_2.

com as cores vermelho e azul

Def. Para todo $s, t \in \mathbb{N}$, definimos
$$R(s,t) = \min\{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (K_s, K_t) \}$$

Em particular $R(k) = R(k,k)$.

Lema 3. $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$ para todo $s,t \geq 2$.

Demonstração

- A prova segue por indução em $\ell = s+t$

Base: $\ell = 4$

Se $\ell = 4$, então $s = t = 2$.

Note que $\underbrace{R(2,2)}_{1} \leq \underbrace{R(1,2)}_{1} + \underbrace{R(2,1)}_{1}$

- Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e seja χ uma coloração do K_n com as cores vermelha e azul.
- Seja v um vértic do K_n
- Sejam $A = \{ u : \chi(vu) = \text{azul} \}$ e $B = \{ u : \chi(vu) = \text{Vermelho} \}$
- Claramente $|A| + |B| = n - 1$
- <u>AFIRMAÇÃO</u>: $|B| \geq R(s-1,t)$ ou $|A| \geq R(s,t-1)$
  - Suponha, para uma contradição, que $|B| < R(s-1,t)$ e $|A| < R(s,t-1)$
  - Portanto $|B| \leq R(s-1,t) - 1$ e $|A| \leq R(s,t-1) - 1$
  - Então

    $n-1 = |A| + |B| \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 2 = n-2$, um absurdo $\square$

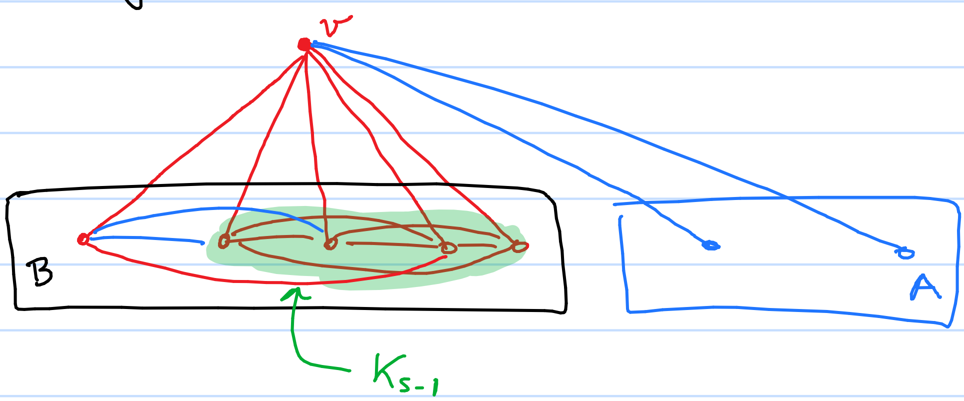
- O restante da prova se divide em dois casos a depende se

  $|B| \geq R(s-1,t)$ ou $|A| \geq R(s,t-1)$.

Caso 1: Primeiro suponha que $|B| \geq R(s-1,t)$

- Assim $G[B] \to (K_{s-1}, K_t)$
- Se existe uma cópia vermelha $K_{s-1} \subseteq G[B]$.

  temos que $G[V(K_{s-1}) \cup \{v\}]$ é uma cópia vermelha do K_s e o resultado segue



- Se existe uma cópia azul $H \subseteq G[B] \subseteq K_n$ do K_t, então o resultado tbm segue

Caso 2: Agora suponha que $|A| \geq R(s,t-1)$

- Assim $G[A] \to (K_s, K_{t-1})$
- Se existe uma cópia azul $K_{t-1} \subseteq G[A]$, então $G[V(K_{t-1}) \cup \{v\}]$ é uma cópia azul do K_t, e o resultado segue
- Se existe uma cópia vermelha $K_s \subseteq G[A] \subseteq K_n$, então o resultado tbm segue $\square$

Teo 4. (Erdős e Szekeres, 1935)

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

para todo $s,t \geq 1$.

Demonstração

- A prova segue por indução em $s+t$
- Base $\min\{s,t\} = 1$
  - Se $\min\{s,t\} = 1$, então
    - Se $s = 1$, então $\binom{s+t-2}{s-1} = \binom{t-2}{0} = 1$
    - Senão $s \geq 2$ e $t = 1$
      - $\binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s-1+t-1}{s-1} = \binom{s-1}{s-1} = 1$

  Em ambos os casos temos que o Teorema vale.
- Passo $\min\{s,t\} \geq 2$

- Pelo Lema 3 e pela H.I. temos

$$R(s,t) \overset{\text{Lema 3}}{\leq} R(s-1,t) + R(s,t-1) \overset{\text{H.I}}{\leq} \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$$

Provamos na aula 1.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\square$

Corolário 5. $$R(3,k) \leq \binom{k+1}{2} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Teorema 6 (Erdős e Szekeres, 1935) Para todo $k \geq 1$,

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

Demonstração

Pelo teorema 4, temos

$$R(k) = R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

$$\boxed{\text{Goal: } \binom{2a}{a} \leq \frac{4^{a+1}}{\sqrt{a+1}}}$$

$$\binom{2k-2}{k-1} = \binom{2(k-1)}{k-1} \leq \frac{4^{k-1+1}}{\sqrt{k-1+1}} = \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

$\square$

$$\boxed{\text{Goal: } \binom{2a}{a} \leqslant \frac{4^{a+1}}{\sqrt{a+1}}}$$

$$\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{(2^2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{n+1}}$$

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\alpha_k} \sqrt{2\pi k}$$

$$\frac{1}{12k+1} \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{1}{12k}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}} \sqrt{2\pi\, 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi\, n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}}\, \cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{\pi n}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sqrt{\pi n}}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{\pi n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} e^{2\alpha_n} \sqrt{\pi n}} = \frac{\dfrac{2^{2n} \cdot \cancel{n^{2n}} \cdot e^{\alpha_{2n}}}{\cancel{e^{2n}}}}{\dfrac{\cancel{n^{2n}}\; e^{2\alpha_n} \sqrt{\pi n}}{\cancel{e^{2n}}}} = \frac{2^{2n} \cdot e^{\alpha_{2n}}}{e^{2\alpha_n} \sqrt{\pi n}}$$

$$\leqslant \frac{2^{2n} e^{\frac{1}{12 \cdot 2n}}}{\sqrt{\pi n} \cdot e^{2/12n+1}} \leqslant \frac{2^{2n} e^{\frac{1}{24n}}}{\sqrt{\pi n}\; e^{\frac{2}{13n}}} = \frac{2^{2n} e^{\frac{13-48}{312n}}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$= \frac{2^{2n} e^{-\frac{35}{312n}}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{4^n \cdot 4}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} < \frac{4}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{4}{\sqrt{n+1}} \iff \frac{1}{4\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\iff \quad \sqrt{n+1} \overset{?}{<} 4\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}$$

Vale para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{4\pi n} \qquad\qquad 1 = e^{0} < e^{35/312n}$$

$$n+1 < 4\pi n$$

$$1 < (4\pi - 1)\, n$$

$$\frac{1}{4\pi - 1} < n$$

$\square$

- Agora vamos focar em criar um limitante inferior para $R(k)$
  - É muito difícil construir colorações que ñ possuam cópias monocromáticas de grandes cliques
    - A primeira prova foi descoberta apenas em 1981 por Frankl e Wilson
    - Entretanto, Erdős (1947) encontrou uma prova ñ construtiva muito simples

Teo (Erdős, 1947)

$$R(k) \geq 2^{k/2}$$

para todo $k \geq 8$.

Demonstração

- Observe que existem $2^{\binom{n}{2}}$ formas de colorir as arestas de um K_n com duas cores.
- Vamos mostrar que o # de colorações com pelo menos uma clique monocromática de tamanho k é estritamente menor do que $2^{\binom{n}{2}}$
  ↳ isso implica que existe uma 2-coloração que ñ tem uma clique monocromática de tamanho k
- Vamos dizer que uma coloração é ruim, se ela possui uma clique monocromática de tamanho k.
- Seja $S \subseteq V(K_n)$ e $|S| = k$ $\Rightarrow$ Há $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$ formas de 2-colorir o K_n tal que $G[S] = K_k$ monocromático.

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

↳ # de arestas de $E(K_n) \setminus E(G[S])$

$2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$ = # formas de 2-colorir $E(K_n) \setminus E(G[S])$

$$\underbrace{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}_{S \text{ é mono vermelho}} + \overbrace{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}^{S \text{ é mono azul}} =$$

$\to A \cup B \leq |A| + |B|$

• Pela cota da união, o número de colorações ruins é no máximo

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$$

• Assim

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} = 2^{\binom{n}{2} + 1 - \frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k} \leq 2^{\binom{n}{2} + 1 - \frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$= \frac{2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{en}{k}\right)^k}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = 2^{\binom{n}{2}+1} \cdot \left(\frac{en}{k \cdot 2^{\frac{(k-1)}{2}}}\right)^k \leq 2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{e\sqrt{2}}{k}\right)^k < 2^{\binom{n}{2}}$$

$*$ $n \leq 2^k$

$*$ $\frac{n}{2^{(k-1)}} \leq \frac{2^k}{2^{k-1}} = \sqrt{2}$

$*$ $2\left(\frac{e\sqrt{2}}{k}\right)^k < 1 \iff 2(e\sqrt{2})^k < k^k$

$2(e\sqrt{2})^k \overset{?}{<} k^k \iff$

$(\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2})^k < k^k$

$\iff$

$\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2} < k$

$\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2} \leq \sqrt[5]{2}\sqrt{2}\, e = 4.47 < k$

Vamos provar $2(e\sqrt{2})^k < k^k$ por indução

Base: $k = 5$

$2(e\sqrt{2})^5 \approx 1679$

$5^5 \approx 3125$

$2(e\sqrt{2})^{k-1} < k^{k-1}$

Passo: $k \geq 6$

$2(e\sqrt{2})^k = 2(e\sqrt{2})^{k-1}(e\sqrt{2}) < k^{k-1}(e\sqrt{2})$ ≈ 3.8

$< k^{k-1} \cdot 6 \leq k^k$

Bom momento p/ contar a piada da lata de feijão.

Proposição Desigualdade de Bernoulli

Se $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Teo. $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Demonstração

$$e^x \underset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{\text{Bernolli}}{\geq} \lim_{n\to\infty} (1+x) = 1 + x$$

$\square$

Teo $\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$

Demo.

- Sabemos que $e^x \geq 1 + x$
- Colocando $x = 1/k$, temos que $e^{1/k} \geq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ (A)
- Considere o seguinte produtório

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{\cancel{2^1} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{4^3} \cdot 5^4 \cdots \cancel{(n-1)}^{n-2} (n)^{n-1}}{1^1 \cdot \cancel{2^2} \cdot \cancel{3^3} \cdot 4^4 \cdots \cancel{(n-1)}^{(n-1)}} = \frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!} \quad \text{(B)}$$

- Além disso, temos

$$e^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} e = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{1/k})^k \overset{\text{(A)}}{\geq} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \overset{\text{(B)}}{=} \frac{n^n}{n!}$$

- Portanto $e^{n-1} \geq \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \boxed{n! \geq \frac{n^n}{e^{n-1}}}$

- Agora vamos provar que $n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$

- Por Stirling, nós temos que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi n} \leq \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n} = \frac{n^n}{e^{n-1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n}}{e}$$

$$\overset{*}{\leq} \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

Note que o último passo (*) vale se $\dfrac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}}{e} \leq n$

$$\frac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}}{e} \leq n \iff \frac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sqrt{n}}}{e} \leq \sqrt{n}\,\cancel{\sqrt{n}} \iff$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1-1/12n}} \leq \sqrt{n} \iff \sqrt{2\pi} \leq e^{1-1/12n}\sqrt{n}$$

(c)

Note que $\sqrt{2\pi} \approx 2.506$ e $\sqrt{n} \geq 1$. Ademais, note que se $n \geq 2$, então

$$2.6 \approx e^{\frac{23}{24}} \leq e^{\frac{12n-1}{12n}} = e^{1-\frac{1}{12n}}$$

Portanto, para $n \geq 2$, $\sqrt{2\pi} \leq e^{1-1/12n}\sqrt{n}$, o que implica que o passo (*) vale p/ $n \geq 2$.

- Para concluir o nosso objetivo, ficou faltando apenas o caso $n=1$. Neste caso, fazemos na mão!!

$$n! = 1! = 1$$

$$\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} = \frac{1^2}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

- Portanto, temos que a desigualdade $n! \leq \dfrac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prop. $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \underset{①}{\leq} \left(\frac{en}{k}\right)^k$, para todo $n,k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$.

Demonstração

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Pelo Teorema anterior, temos $\frac{k^k}{e^{k-1}} \leq k! \leq \frac{k^{k+1}}{e^{k-1}}$.

① $\frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n \cdots (n-k+1)\, e^{k-1}}{k^k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$

② $\frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots \underbrace{(k-(k-1))}_{1}} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n-i}{k-i}\right) \geq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$

$$\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k} \iff \frac{n-i}{k-i} - \frac{n}{k} \geq 0 \iff \frac{k(n-i) - n(k-i)}{k(k-i)} \geq 0$$

$$\iff \frac{-ik+ni}{k(k-i)} \geq 0 \iff \underbrace{i}_{i \geq 0}\,\underbrace{(n-k)}_{k \leq n \Rightarrow n-k \geq 0} \geq 0 \checkmark$$

$\square$

Prop. $\binom{n}{x}$ é uma função convexa para todo $n \geq x-1$.

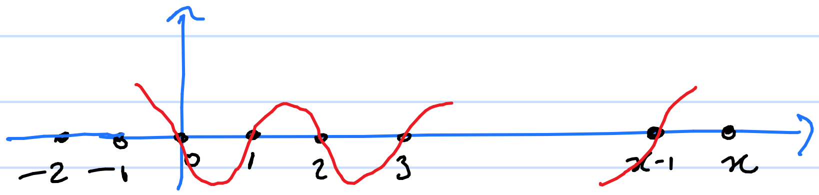
Demonstração

- Por definição $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}{x!\,\cancel{(n-x)!}}$

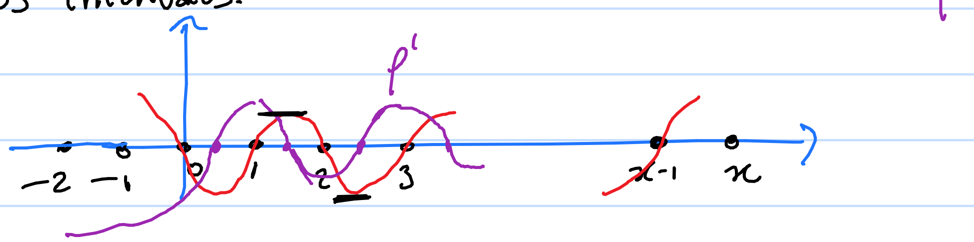
$$= \frac{1}{x!}\prod_{i=0}^{x-1}(n-i)$$

note que isso é uma constante! (estamos olhando o binômio como com x fixo em função de n)

- Então a convexidade/concavidade de $\binom{n}{x}$ será dada por $f(n) = \prod_{i=0}^{x-1}(n-i)$
- Note que $f(n)$ é um polinômio de grau x, portanto, $f(n)$ tem x raizes
- Ademais, note que essas raízes são $\{0, 1, \ldots, x-1\}$



- Sabemos que $f'(n) = 0$ para ao menos um valor nos $x-1$ intervalos entre as raizes. Agora note que $f'(n)$ é um polinômio de grau $x-1$, então existe exatamente uma raiz de $f(n)$ em cada um dos intervalos.



- Agora a $f''(n)$ é um polinômio de grau $x-2$ e terá $x-2$ raizes no intervalo $(0, x-1)$
- Assim $f''(n)$ ñ tem raízes em $(-\infty, 0]$ e $[x-1, \infty)$ e portanto será concava ou convexa nesses intervalos.
- Analisando o comportamento de $f(n)$ em dois pontos em cada um desses intervalos nos mostra que
  - $f(n)$ é concava em $(-\infty, 0]$
  - $f(n)$ é convexa em $[x-1, \infty)$.